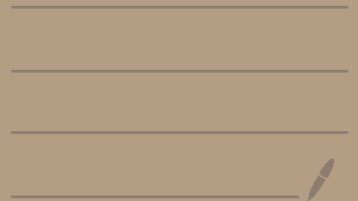


Probabilités, L3

Université de Picardie Jules Verne
S6, 2021



Cours 3, probabilités L3

Prop. une fonction de répartition présente au plus un nombre dénombrable de discontinuités

dém. soit $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ou $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$, et soit F la fonction de répartition de P ($F(x) = P\left(\left]-\infty, x\right]\right)$)

Rappel. F est C^0 à droite et, $\forall x$, $\lim_{y \rightarrow x^-} F(y) = P\left(\left]-\infty, x\right[\right) = F(x) - P(\{x\})$.

$\Rightarrow$ L'ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ des points où F n'est pas C^0 est donc

$$\mathcal{D} = \left\{ x \in \mathbb{R}, P(\{x\}) > 0 \right\}$$

$\forall n \geq 0$, on note $\mathcal{D}_n = \{x \in \mathcal{D}, P(\{x\}) \geq \frac{1}{n}\}$ ms $\mathcal{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_n$.

On remarque que $\forall n \geq 0$, $\# \mathcal{D}_n \leq n$

$\hookrightarrow$ cardinal = nombre d'éléments de

En effet, si $x_1, \dots, x_k$ sont $k \geq 1$ éléments distincts de $\mathcal{D}_n$, on a

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k \{x_i\}\right) = \sum_{i=1}^k P(\underbrace{\{x_i\}}_{\mathcal{D}_n}) \geq \sum_{i=1}^k \frac{1}{n} = \frac{k}{n} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \frac{k}{n} \leq 1 \\ \Rightarrow \# \mathcal{D}_n \leq n \end{array} \right\}$$

Ms $P\left(\underbrace{\bigcup_{i=1}^k \{x_i\}}_{\subset \mathcal{D}_n}\right) \leq P(\mathcal{D}_n) \leq P(\Omega) = 1$

d'où $\mathcal{D} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\mathcal{D}_n}_{\text{fin}}$ est fini ou dénombrable $\blacksquare$

Théorème : une fonction de répartition caractérise complètement la probabilité, i.e.,
Si P_1 et P_2 sont 2 proba sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de fonctions de répartition F_1, F_2 ,

Alors $P_1 = P_2 \iff F_1 = F_2$

dém. $\boxed{\Rightarrow}$ clair
 $\boxed{\Leftarrow} \forall]a, b] \subset \mathbb{R}$ intervalle,

$$P_1\left(\bigcup_{a, b}\right] = F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a) = P_2\left(\bigcup_{a, b}\right]$$

La classe des intervalles $]a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ est stable par intersection finie et engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Par le corollaire ou p.10 du cours 2, on déduit que $P_1 = P_2$ $\blacksquare$

Corollaire Soit X, Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$,
resp. $(\Omega', \mathcal{A}', P')$,

avec X, Y à valeurs réelles ou entières

Si $F_X = F_Y$ alors X et Y ont même loi

dém. on applique le résultat précédent pour $P_1 = P_X$, $P_2 = P_Y$ $\blacksquare$

Espérance et variance

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ espace probabilisé avec Ω fini ou dénombrable

Soit X soit une variable aléatoire réelle (i.e., une application $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$)

Répetons n fois l'expérience aléatoire et $\forall \omega \in \Omega$ notons $f_n(\{\omega\})$ la fréquence de réalisation du singleton $\{\omega\}$. La moyenne de X en n expériences est

$$M_n = \sum_{\omega \in \Omega} f_n(\{\omega\}) X(\omega)$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$ on s'attend à ce que $f_n(\{\omega\}) \rightarrow P(\{\omega\})$, ce qui nous amène à

Déf / prop soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ espace probabilisé, Ω fini ou dénombrable.

Soit X une v.a.r. telle que $\underbrace{\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) |X(\omega)|}_{E(|X|)} < +\infty$

Alors le nombre

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega) \text{ existe et est appelé } \textcolor{red}{\text{espérance de } X}$$

(on dit que X est $\textcolor{red}{\text{intégrable}}$)

$\textcolor{brown}{\text{dém.}}$ soient X^+, X^- les parties positive et négative de X , i.e.,

$$X^+ = \max(X, 0) = X \mathbb{1}_{X \geq 0} \geq 0, \quad X^- = \max(-X, 0) = -X \mathbb{1}_{X \leq 0} \geq 0$$

$$\text{On a } X^+ + X^- = |X| \text{ et } X^+ - X^- = X$$

En particulier $X^+, X^- \leq |X|$ donc

$$E(X^\pm) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X^\pm(\omega) < +\infty,$$

$$\text{et on pose } E(X) = E(X^+) - E(X^-) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \underbrace{(X^+(\omega) - X^-(\omega))}_{X(\omega)} \quad \blacksquare$$

Prop. Ω fini ou dénombrable, $P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$ proba, $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ v.a. n. t.q.

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) |X(\omega)| < +\infty \quad \text{Alors} \quad E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) x$$

$\hookrightarrow$ fini ou dénombrable

dém. pour simplifier, supposons que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ (toujours possible de s'y ramener si $X(\Omega)$ dénombrable)

$$\text{Les événements } (\{X=n\})_{n \in \mathbb{N}} = (\{\omega \in \Omega \text{ t.q. } X(\omega)=n\})_{n \in \mathbb{N}}$$

forment une partition de Ω . On a donc

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[\sum_{\omega \in \{X=n\}} P(\{\omega\}) \underbrace{X(\omega)}_n \right] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} n \left(\underbrace{P(\{\omega \in \Omega \text{ t.q. } X(\omega)=n\})}_{P_X(n) = P(X=n)} \right) \end{aligned}$$

Prop. L'espérance a les propriétés suivantes.

(i) **Comparaison**. X, Y 2 v.a.n. discrètes t.q. $X(\omega) \leq Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$ et t.q.

$$E(|X|), E(|Y|) < +\infty. \text{ Alors } E(X) \leq E(Y)$$

(ii) **Linéarité**. X, Y 2 v.a.n. discrètes t.q. $E(|X|), E(|Y|) < +\infty$

$$\text{Alors } \forall \lambda \in \mathbb{R}, \underbrace{E(\lambda X + Y)}_{\text{bien défini}} = \lambda E(X) + E(Y)$$

fonction constante $= c \in \mathbb{R}$

(iii) $\forall A \in \mathcal{A}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, E(\lambda \mathbb{1}_A) = \lambda P(A)$ En particulier, $E(\overset{\uparrow}{c}) = E(c \mathbb{1}_\Omega) = c$

Lem. (i) si X, Y positives, alors $\forall \omega, 0 \leq P(\{\omega\}) X(\omega) \leq P(\{\omega\}) Y(\omega)$

$$\text{et } 0 \leq E(X) = \sum_{\omega} P(\{\omega\}) X(\omega) \leq \sum_{\omega} P(\{\omega\}) Y(\omega) = E(Y)$$

Cas général. $X \leq Y \Leftrightarrow X^+ \leq Y^+$ et $X^- \geq Y^-$
d'où $E(X^+) \leq E(Y^+)$ et $E(X^-) \geq E(Y^-)$

$$\star \quad E(X) = E(X^+) - E(X^-) \leq E(Y^+) - E(Y^-) = E(Y).$$

$$(ii) \quad \forall \omega \in \Omega, \quad |\lambda X(\omega) + Y(\omega)| \leq |\lambda| \cdot |X(\omega)| + |Y(\omega)| \quad (\text{inég triangulaire})$$

$$i.e. \quad |\lambda X + Y| \leq |\lambda| |X| + |Y|$$

$$\Rightarrow E(|\lambda X + Y|) \leq |\lambda| E(|X|) + E(|Y|) < +\infty$$

$$\text{De plus, } E(\lambda X + Y) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) (\lambda X(\omega) + Y(\omega)) = \lambda \sum_{\omega} P(\{\omega\}) X(\omega) + \sum_{\omega} P(\{\omega\}) Y(\omega) \\ = \lambda E(X) + E(Y)$$

$$(iii) \quad E(\lambda \mathbb{1}_A) = \lambda E(\mathbb{1}_A) = \lambda \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \lambda P(A)$$

Remarque. s. X v.a. discrète bornée par $M > 0$ ($|X(\omega)| \leq M$ pour tout $\omega \in \Omega$)

$$\text{d'où } \underbrace{|E(X)|}_{\text{existe}} \leq E(|X|) \leq M.$$

Déf-Prop. Soit X v.a. discrète t q. $E(X^2) < +\infty$ Alors X est intégrable

et on définit la **variance** de X , $\text{Var}(X)$ ou $V(X)$, par.

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - (E(X))^2$$

dém. • $X = \underbrace{X \mathbb{1}_{|X| \leq 1}}_{\text{intégrable}} + \underbrace{X \mathbb{1}_{|X| > 1}}_Y$

$$Y \leq X^2 \mathbb{1}_{|X| > 1} \leq X^2 \text{ car } \underbrace{X^2}_{|X|^2} > |X| \text{ lorsque } |X| > 1$$

donc Y est intégrable et donc X aussi

• $(X - E(X))^2 = X^2 - 2E(X)X + (E(X))^2$ donc par linéarité de l'espérance,

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2 \quad \square$$

Exemples.

(a) X v.a. de Bernoulli de param $p \in [0, 1]$.

$$E(X) = p \quad \text{et}$$

$$V(X) = p(1-p)$$

$$\left(\begin{aligned} E(X) &= P\{X=0\} \times 0 \\ &\quad + P\{X=1\} \times 1 = p \end{aligned} \right)$$

(b) X v.a. binomiale $B(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$.

$$E(X) = np \quad \text{et}$$

$$V(X) = np(1-p)$$

(c) X v.a. géométrique de paramètre $a \in [0, 1[$.

$$E(X) = \frac{a}{1-a} \quad \text{et}$$

$$V(X) = \frac{a}{(1-a)^2}$$

(d) X v.a. de Poisson de param $\lambda \in]0, +\infty[$.

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

$$\left(P(X=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \right)$$

Don : exercice Par exemple.

$$\textcircled{a} \quad E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{P(X=n)}_{e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}} n = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}}_{P(X=n)} = \lambda \quad \text{car } P(\Omega) = 1$$

$\lambda^n = \lambda \lambda^{n-1}$ $k = n-1$

$$\textcircled{b} \quad g : x \mapsto ((1-p) + px)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (px)^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} x^i \quad \text{polynôme en } x$$

$$g'(x) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} i x^{i-1}$$

$$g'(1) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}}_{P(X=i)} i = E(X) \quad \text{car} \quad g'(x) = np((1-p) + px)^{n-1}$$

$$g'(1) = np = E(X)$$

Pour $V(X)$, utiliser g''

Prop.. (Inégalité de Bienaymé - Tchebicheff)

Soit X v.a. discrete de variance $\sigma^2 = V(X)$ et $a > 0$ Alors

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(X^2)}{a^2} \quad \text{et} \quad P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

dém. • $E(X^2) = E(X^2 \mathbb{1}_{|X| \geq a} + X^2 \mathbb{1}_{|X| < a})$

$$\begin{aligned} &\geq E(X^2 \mathbb{1}_{|X| \geq a}) \geq E(a^2 \mathbb{1}_{|X| \geq a}) = a^2 E(\mathbb{1}_{|X| \geq a}) \\ &= a^2 P(|X| \geq a). \end{aligned}$$

• $Y = X - E(X) \rightsquigarrow \underbrace{P(|Y| \geq a)}_{P(|X - E(X)| \geq a)} \leq \frac{E(Y^2)}{a^2}$

mais $E(Y^2) = E((X - E(X))^2) = V(X) = \sigma^2.$ 